Capitolo XIII

COMPLEMENTI ALLA TEORIA DELL'INTEGRAZIONE

1. Funzioni reali a variazione limitata.

Sia $f: R \to R$ definita in un intervallo $[a,b]$. Operiamo una partizione di $[a,b]$ mediante un numero finito di punti di divisione $x_0=a < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n=b$. Se, al variare comunque della suddivisione effettuata, l'estremo superiore

$$\operatorname{Sup} \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i)-f(x_{i-1}) \right|$$

è finito, diremo che f è a variazione limitata in $[a,b]$ e chiameremo tale estremo superiore variazione totale $V_a^b = V_a^b(f)$ in $[a,b]$.

Si vede subito che $f \in BV \Rightarrow |f| \in BV$. Conseguentem. $f^{\pm} = \frac{|f| \pm f}{2}$

Perchè f sia a variazione limitata in $[a,b]$ è necessario che f sia limitata in $[a,b]$ ed è necessario e sufficiente che siano a variazione limitata in $[a,b]$ la sua parte positiva f^+ e la sua parte negativa f^-.

Sono evidentemente a variazione limitata

a) le funzioni monotone in $[a,b]$, per le quali è $V_a^b = |f(b)-f(a)|$;

b) le funzioni che soddisfano in $[a,b]$ la cosiddetta "condizione di Dirichlet", e cioè le funzioni per le quali esiste una partizione finita di $[a,b]$ in intervalli tali che in ciascuno di essi f risulti continua e monotona;

c) le funzioni lipschitziane in $[a,b]$; in particolare le funzioni derivabili in $[a,b]$ con derivata limitata e le funzioni integrali di funzioni quasi ovunque limitate integrabili in (a,b). vale per le A.C.

Le funzioni continue in $[a,b]$ non sono invece necessariamente a variazione limitata; basta considerare come controesempio la funzione

$x \to x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ in $[0,1]$.

E' facile dimostrare che somma e prodotto di funzioni a variazione limitata in $[a,b]$ sono a variazione limitata in $[a,b]$. Analogamente dicasi per il quoziente, purchè il modulo del divisore abbia estremo inferiore positivo in $[a,b]$.
Ogni funzione a variazione limitata in $[a,b]$, è a variazione limitata in qualunque intervallo contenuto in $[a,b]$. Inoltre la variazione totale è una funzione additiva di intervallo. Vale infatti il

Teorema 1.1 - Se $a < c < b$, f è a variazione limitata in $[a,b]$ se e solo se è a variazione limitata in $[a,c]$ e in $[c,b]$ e risulta

$$V_a^b = V_a^c + V_c^b \quad . \tag{1.1}$$

Infatti consideriamo una partizione di $[a,c]$ e una di $[c,b]$ e siano Σ' e Σ'' le somme corrispondenti. La riunione delle due partizioni dà una partizione di $[a,b]$ e, detta Σ la corrispondente somma, risulta $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$. Perciò

$$V_a^b \geq V_a^c + V_c^b \quad . \tag{1.2}$$

Viceversa, consideriamo una partizione di $[a,b]$ e la corrispondente somma Σ . Aggiungiamo c ai punti di divisione (se già non vi appartiene) : si ottiene una nuova somma $\Sigma^* \geq \Sigma$ che può ritenersi formata da due parti, Σ' e Σ'' relative rispettivamente a una partizione di $[a,c]$ e di $[c,b]$. Si ha quindi $\Sigma \leq \Sigma^* = \Sigma' + \Sigma''$ da cui

$$V_a^b \leq V_a^c + V_c^b \quad .$$

Di qui e da (1.2) segue (1.1) .
Veniamo ora a dimostrare il

Teorema 1.2 - Qualunque funzione a variazione limitata è la differenza di due funzioni monotone non decrescenti.
Sia infatti $a \leq x \leq b$. La funzione $V(x) = V_a^x(f)$ è monotona non decrescente per la (1.1). Inoltre, per ogni $a \leq \alpha < \beta \leq b$ risulta

$$f(\beta) - f(\alpha) \leq |f(\beta) - f(\alpha)| \leq V_\alpha^\beta = V(\beta) - V(\alpha)$$

da cui

$$V(\beta) - f(\beta) \geq V(\alpha) - f(\alpha) \quad .$$

La funzione $V(x) - f(x)$ è quindi monotona non decrescente in $[a,b]$ e, potendosi scrivere

$$f(x) = V(x) - \{V(x) - f(x)\}$$

ne segue la tesi.
La classe delle funzioni a variazione limitata in $[a,b]$ si identifica quindi con la classe delle funzioni che sono differenza di due funzioni monotone in $[a,b]$. Di conseguenza, una funzione a variazione limitata può avere al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità, tutti di prima specie.
Osserviamo infine che la funzione $V(x) = V_a^x(f)$ ha gli stessi punti di discontinuità di $f(x)$ e, in essi, i salti di $V(x)$ sono eguali al modulo dei salti di $f(x)$. Questo è evidente se f è monotona, essendo in tal caso $V(x_1) - V(x_2) = |f(x_1) - f(x_2)|$. Il caso generale segue decomponendo f nella differenza di due funzioni monotone, una delle quali continua nel punto di discontinuità di f che si sta considerando.

2. Funzioni vettoriali a variazione limitata.

Sia $\underline{f} : R \to R^n$ definita in un intervallo $[a,b]$, di componenti f_m $(m=1 \ldots n)$.

Consideriamo una partizione finita di $[a,b]$ mediante i punti di divisione $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_p = b$. Se, al variare comunque della partizione effettuata l'estremo superiore

$$\operatorname{Sup} \sum_{i=1}^{p} \| \underline{f}(x_i) - \underline{f}(x_{i-1}) \|$$

è finito, diremo che $\underline{f}$ è a variazione limitata in $[a,b]$ e chiameremo tale estremo superiore "variazione totale" di $\underline{f}$ in $[a,b]$.
La definizione è quindi del tutto analoga a quella che si dà nel caso di funzioni $f: R \to R$.
Dalle disuguaglianze evidenti

$$|f_m(x)-f_m(x')| \leq \|\underline{f}(x)-\underline{f}(x')\| = \leq n \operatorname*{Sup}_{m=1\dots n} |f_m(x)-f_m(x')|$$

si ricava immediatamente che :

Condizione necessaria e sufficiente affinchè $\underline{f} : [a,b] \to R^n$ sia a variazione limitata è che tutte le sue componenti siano a variazione limitata.

Ricordando le note definizioni di curva rettificabile e di lunghezza di una curva rettificabile, si deduce facilmente il

non è ben data perchè dipende dalla parametrizzazione

<u>Teorema</u> 2.1 - Sia γ una curva di equazione parametrica $\underline{x}=\underline{x}(t)$ $(\underline{x}: [a,b] \to R^n)$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè γ sia rettificabile è che la funzione $\underline{x}(t)$ sia a variazione limitata in $[a,b]$. Inoltre, la lunghezza di γ coincide con la variazione totale di $\underline{x}$ in $[a,b]$.

3. <u>Integrale secondo Riemann-Stieltjes</u>.

Siano f e φ due funzioni reali definite in un intervallo $[a,b]$ e sia f limitata in $[a,b]$.
Consideriamo una qualsiasi partizione di $[a,b]$ mediante i punti di divisione $x_0=a < x_1 < \dots < x_n = b$ e sia $\delta = \operatorname*{Max}_{i=1\dots n}(x_i - x_{i-1})$. Diciamo f_i un qualsiasi numero reale compreso fra l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei valori assunti da f nello intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ e consideriamo la somma

$$(3.1) \qquad \Sigma = \sum_{i=1}^{n} f_i (\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta_i \varphi \quad ;$$

essa dipende sia dalla partizione effettuata, sia dalla scelta dei numeri f_i.
Se esiste finito $\lim_{\delta \to 0} \Sigma$, questo limite viene chiamato <u>integrale secondo Riemann-Stieltjes</u> di f rispetto alla funzione integratrice φ e viene denotato col simbolo

$$\int_a^b f \, d\varphi \ .$$

L'integrale classico secondo Riemann è evidentemente un caso particolare del precedente, con $\varphi(x) \equiv x$.
Se φ è monotona non decrescente, si può dare dell'integrale di Stieltjes un'interpretazione molto interessante. Supponiamo che su $[a,b]$ sia collocata una distribuzione di massa, assegnata da $\varphi(x)$. La massa dell'intervallo (x_{i-1}, x_i) sarà allora $\Delta_i \varphi$. Ogni punto di discontinuità x di $\varphi(x)$ corrisponde a una "concentrazione di massa" di entità $\varphi(x+)-\varphi(x-)$ e il contributo che tale concentrazione di massa porta all'integrale è evidentemente $f(x) \cdot (\varphi(x+)-\varphi(x-))$, purchè f sia continua in x.
L'integrale di Stieltjes è quindi utile per rappresentare fenomeni in cui si presentano sia distribuzioni continue sia distribuzioni concentrate (separatamente oppure congiuntamente).
Osserviamo inoltre che anche le somme (e le serie) si possono esprimere come integrali di Stieltjes. Ad esempio, se f(x) è continua nei punti di ascissa intera, si ha

$$\sum_{h=1}^{n} f(h) = \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(x) d[x]$$

dove $[x]$ denota la parte intera di x.

4. <u>Condizioni per l'esistenza dell'integrale di Riemann-Stieltjes</u>.

<u>Teorema</u> 4.1 - Affinchè esista $\int_a^b f d\varphi$ è necessario che f e φ non abbiano punti di discontinuià in comune.

Rifare

Dimostreremo il teorema per assurdo. Supponiamo che f e φ abbiano entrambi una discontinuità nel punto $x_o \in [a,b]$ e sia $K > 0$ minore dell'oscillazione di f e φ in x_o. Allora, per ogni $\delta > 0$ esistono a_δ e b_δ $(x_o - \frac{\delta}{2} < a_\delta < x_o < b_\delta < x_o + \frac{\delta}{2})$ tali che

questo non è vero per ogni $K < (\mathrm{osc}\,\varphi)(x_0)$

$$(4.1) \qquad |\varphi(b_\delta) - \varphi(a_\delta)| > K \quad .$$

Inoltre, in (a_δ, b_δ) esistono x'_δ e x''_δ tali che

$$(4.2) \qquad f(x'_\delta) - f(x''_\delta) > K \quad .$$

Operiamo una partizione di $[a,b]$ in intervalli di ampiezza non superiore a δ di cui faccia parte l'intervallo (a_δ, b_δ) come i-mo intervallo. Consideriamo le due somme del tipo (3.1)

$$\Sigma'_\delta = \sum_{h \neq i} f_h \Delta_h \varphi + f(x'_\delta)\Delta_i \varphi$$

$$\Sigma''_\delta = \sum_{h \neq i} f_h \Delta_h \varphi + f(x''_\delta)\Delta_i \varphi \quad .$$

Risulta, per le (4.1) e (4.2) :

$$|\Sigma'_\delta - \Sigma''_\delta| = |f(x'_\delta) - f(x''_\delta)|\,|\Delta_i \varphi| = |f(x'_\delta) - f(x''_\delta)|\,|\varphi(a_\delta) - \varphi(b_\delta)| > K^2$$

e quindi, per $\delta \to 0$, Σ'_δ e Σ''_δ non possono tendere a uno stesso limite. Dunque $\int_a^b f d\varphi$ non esiste.

Teorema 4.2 - Se f è continua e φ è a variazione limitata su $[a,b]$, esiste $\int_a^b f d\varphi$.

Infatti, sia $\varepsilon > 0$ arbitrario; essendo f uniformemente continua in $[a,b]$, è possibile determinare $\delta > 0$ tale che

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2 V_a^b(\varphi)} \quad .$$

Siano ora

$$\Sigma' = \sum_{h=1}^{n} f'_h \Delta'_h \quad , \qquad \Sigma'' = \sum_{h=1}^{m} f''_h \Delta''_h$$

due qualsiasi somme del tipo (3.1) relative a partizioni in intervalli di ampiezza non superiore a δ.

Se Σ' e Σ'' corrispondono a una stessa partizione risulta immediatamente

$$|\Sigma' - \Sigma''| = \left|\sum_{h=1}^{n} (f'_h - f''_h)\Delta_h \varphi\right|$$

$$(4.3) \qquad \leq \frac{\varepsilon}{2 V_a^b(\varphi)} \sum_{h=1}^{n} |\Delta_h \varphi|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Se Σ'' corrisponde a una partizione ottenuta intercalando nuovi punti di divisione nella partizione corrispondente a Σ', consideriamo il generico intervallo (x_{h-1}, x_h) della partizione associata a Σ'. Gli intervalli della partizione associata a Σ'' la cui unione coincide con l'intervallo (x_{h-1}, x_h) siano quelli di posto da m_h a n_h. Risulta :

$$\left|f'_h \Delta'_h \varphi - \sum_{i=m_h}^{n_h} f''_i \Delta''_i \varphi\right| = \left|\sum_{i=m_h}^{n_h} (f'_h - f''_i)\Delta''_i \varphi\right| \leq \frac{\varepsilon}{2V_a^b(\varphi)} V_{x_{h-1}}^{x_h}(\varphi)$$

da cui, sommando rispetto a h da 1 a n, si ottiene ancora la (4.3).

Consideriamo infine due qualsiasi somme Σ' e Σ'' e sia Σ una qualsiasi somma del tipo (3.1) associata alla partizione composta con quelle di Σ' e Σ''. Per quanto sopra dimostrato risulta

$$|\Sigma' - \Sigma| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad , \qquad |\Sigma'' - \Sigma| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui segue

$$(4.4) \qquad |\Sigma' - \Sigma''| < \varepsilon$$

ogni qual volta Σ' e Σ'' corrispondono a partizioni per le quali l'ampiezza massima degli intervalli componenti non supera $\delta = \delta(\varepsilon)$. La (4.4) implica, per la condizione di Cauchy, l'esistenza di $\int_a^b f\, d\varphi$ c.d.d.

Più in generale, si potrebbe dimostrare il

<u>Teorema</u> 4.3 - Se φ è a variazione limitata in $[a,b]$, allora condizione necessaria e sufficiente affinchè esista $\int_a^b f\, d\varphi$ è che l'insieme dei punti di discontinuità di f sia a variazione nulla rispetto a φ(°).

$\boxed{\text{cercare su Saks}}$

che cos'è $\int_0^1 f\,d\varphi$ se $f \in C([0,1])$ e φ è la funzione di Vitali ?

5. <u>Casi particolari notevoli</u>.

Consideriamo ora alcuni casi particolari notevoli nei quali l'esistenza dell'integrale è assicurata dal teorema 4.2 .

1) φ sia una funzione a scala, cioè esistano $x_0=a < x_1 < \ldots < x_n=b$ tali che $\varphi(x)=c_i$ per $x \in (x_{i-1}, x_i]$. Allora se $f \in \mathscr{C}^{(0)}[a,b]$ esiste $\int_a^b f\, d\varphi$ ed è

$$\int_a^b f\, d\varphi = \sum_{i=1}^{n} (c_i - c_{i-1}) f(x_i) \quad .$$

2) Esista una successione $\{x_i\}$ di punti $x_0=a<x_1<\ldots<x_i<\ldots$, $\lim_{i\to+\infty} x_i=b$, tali che $\varphi(x)=c_i$ per $x \in (x_{i-1}, x_i]$, e la serie $\sum_{i=1}^{n} |c_i - c_{i-1}|$ converga. Allora, se $f \in \mathscr{C}^{(0)}[a,b]$, esiste $\int_a^b f\, d\varphi$ ed è

$$\int_a^b f\, d\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)(c_i - c_{i-1}) \quad .$$

3) <u>Teorema</u> 5.1 - Se $f \in \mathscr{C}^{(0)}[a,b]$ e $\varphi \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$ esiste $\int_a^b f\, d\varphi$ e risulta

$$\int_a^b f\, d\varphi = \int_a^b f(x)\, \varphi'(x)\, dx \quad . \tag{5.1}$$

Infatti, in questo caso

(°) Cioè, assegnato comunque $\varepsilon > 0$, sia possibile determinare una copertura dell'insieme mediante intervalli tali che la somma delle variazioni totali di φ in questi intervalli non superi ε .

$$\Delta_i \varphi = \varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) = \varphi'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

con x_i^* opportuno punto dell'intervallo (x_{i-1}, x_i). Scegliamo per f_i il particolare valore $f(x_i^*)$. Otteniamo così la particolare somma di tipo (3.1):

$$\Sigma^* = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\varphi'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \quad . \tag{5.2}$$

Al tendere di $\sup_i (x_i - x_{i-1})$ a zero, il primo membro di (5.2) tende a $\int_a^b f\, d\varphi$ mentre il secondo membro tende all'integrale su (a,b) della funzione continua $f\varphi'$. Ne segue la (5.1).

Conviene anche notare che in questo caso l'integrale di Stieltjes si riduce a un integrale ordinario.

6. <u>Principali proprietà dell'integrale di Riemann-Stieltjes</u>.

Per l'integrale di Stieltjes valgono le seguenti proprietà elementari, di cui omettiamo la facile dimostrazione.

1) Esista $\int_a^b f\, d\varphi$. Allora esistono anche $\int_a^b (\alpha f) d\varphi$ e $\int_a^b f\, d(\alpha\varphi)$ (α costante) ed è

$$\int_a^b \alpha f\, d\varphi = \int_a^b f\, d(\alpha\varphi) = \alpha \int_a^b f\, d\varphi \quad .$$

2) Se f_1 , f_2 sono continue e φ è a variazione limitata in $[a,b]$, risulta

$$\int_a^b (f_1 + f_2) d\varphi = \int_a^b f_1\, d\varphi + \int_a^b f_2\, d\varphi \quad .$$

3) Se f è continua e φ_1, φ_2 sono a variazione limitata in $[a,b]$, risulta

$$\int_a^b f\, d(\varphi_1 + \varphi_2) = \int_a^b f\, d\varphi_1 + \int_a^b f\, d\varphi_2 \quad .$$

4) Se $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$;

$$\int_{x_0}^{x_n} f\, d\varphi = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f\, d\varphi$$

e il primo mebro ha senso se e solo se ha senso il secondo.

5) Se f è continua e φ è a variazione limitata in $[a,b]$, risulta

$$\left| \int_a^b f\, d\varphi \right| \leq \int_a^b |f|\, dV \quad .$$

dove $V=V(x)=V_a^x(\varphi)$.

6) (Integrazione per parti). Se f è continua e a variazione limitata e φ è a variazione limitata in $[a,b]$, risulta

$$(6.1) \qquad \int_a^b f\, d\varphi = [f\varphi]_a^b - \int_a^b \varphi\, d f \quad .$$

perché esiste?

Infatti, sia $x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$ e siano $x_2^*,\ldots x_{n-1}^*$ punti scelti a piacere rispettivamente negli intervalli $[x_1,x_2],\ldots[x_{n-2},x_{n-1}]$. Consideriamo la particolare somma del tipo (3.1)

$$f(a)(\varphi(x_1)-\varphi(a))+\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i^*)(\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1}))+$$

$$+ f(b)(\varphi(b)-\varphi(x_{n-1})) =$$

$$=f(b)\varphi(b)-f(a)\varphi(a)-\sum_{i=1}^{n-1} \varphi(x_i)(f(x_{i+1}^*)-f(x_i^*)).$$

Se $\sup_i (x_i-x_{i-1}) \to 0$, anche $\sup_i (x_{i+1}^*-x_i^*)\to 0$; per la uniforme continuità di f in $[a,b]$ si ha quindi $\sup_i |f(x_{i+1}^*)-f(x_i^*)| \to 0$ e dalla identità precedente segue la (6.1).

7. Alcune possibili generalizzazioni.

Accenniamo ora ad alcune generalizzazioni dell'integrale di Riemann-Stieltjes. Si possono considerare integrali di questo tipo estesi a intervalli infiniti e per funzioni f non limitate. In questi casi l'integrale viene definito mediante un passaggio al limite, cioè come limite di un analogo integrale esteso a insiemi limitati e per funzioni limitate.

E' anche possibile estendere la nozione di integrale di Stieltjes al caso di funzioni $f,\varphi : R^n \to R$. L'aspetto classico di tale integrale viene concettualmente assorbito dalla nozione fondamentale di integrale secondo Lebesgue-Stieltjes: ci limitiamo quindi ad accennare alla sua definizione nel caso n=2 .

Siano f,φ definite in un intervallo chiuso e limitato I $(a \leq x \leq b\ ,\ c \leq y \leq d)$ di R^2 a valori reali. Diremo che f è integrabile rispetto a φ in I se esiste

$$\int_I f d\varphi = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{i,j} \{\varphi(x_i,y_j)-\varphi(x_{i-1},y_j)-$$

$$- \varphi(x_i,y_{j-1}) + \varphi(x_{i-1},y_{j-1})\}$$

$(x_0=a<x_1<\ldots<x_m=b\ ;\ y_0=c<y_1<\ldots<y_n=d)$, dove δ è la massima diagonale degli intervalli

$$I_{i,j}=\{(x,y)\in R^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

e $f_{i,j}$ è un valore compreso fra l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei valori assunti da f in $I_{i,j}$.

Anche la nozione di funzione a variazione limitata può venire estesa a funzioni $\varphi : R^2 \to R$. Si procede come nel paragrafo 1, sostituendo alla "funzione di intervallo" $\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})$ la funzione di intervallo

$$\varphi(x_i,y_j)-\varphi(x_{i-1},y_j)-\varphi(x_i,y_{j-1})+\varphi(x_{i-1},y_{j-1}).$$

Se φ è a variazione limitata, vale per l'integrale di Stieltjes negli intervalli di R^2 un teorema analogo al teorema 4.3. In particolare :

Teorema 7.1 - Se f è continua e φ è a variazione limitata in un intervallo I, l'integrale $\int_I f\, d\varphi$ esiste.

Supponiamo ora che φ abbia in I derivate seconde miste continue. Allora, se (x,y) e (x',y') sono due punti qualunque di I, applicando il teorema dell'incremento finito si ottiene :

$$\begin{aligned}\varphi(x',y')-\varphi(x',y)-\varphi(x,y')+\varphi(x,y) &= \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x',\bar{y})-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,\bar{y})\right)(y'-y) \\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(\bar{x},\bar{y})(x'-x)(y'-y)\end{aligned} \tag{7.1}$$

con $\bar{x}\in(x,x')$, $\bar{y}\in(y,y')$ opportuni. Allora φ è evidentemente a variazione limitata in I.
Ragionando come nella dimostrazione del teorema 5.1 si perviene al

Teorema 7.2 - Se $f\in\mathscr{C}^{(0)}(I)$ e φ ha in I derivate seconde miste continue, allora esiste $\int_I f\, d\varphi$ e risulta

$$\int_I f\, d\varphi = \int_I f\, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\, dx\, dy \quad .$$

Le considerazioni svolte in questo paragrafo possono venire facilmente estese al caso in cui I sia, anzichè un intervallo, una regione quadrabile di R^2.

8. Integrali lungo una linea.

Sia γ una curva rettificabile di R^n, di equazione $\underline{x}=\underline{x}(t)$, dove $\underline{x}:[a,b]\to R^n$ è continua e a variazione limitata in $[a,b]$. Siano f, $\varphi: R^n\to R$ definite almeno nei punti di γ . Diremo che f è integrabile rispetto a φ lungo la linea γ se e solo se esiste l'integrale di Stieltjes $\int_a^b f(\underline{x}(t))d\varphi(\underline{x}(t))$ e porremo, per definizione

$$\int_\gamma f\, d\varphi = \int_a^b f(\underline{x}(t))d\varphi(\underline{x}(t)) \quad . \tag{8.1}$$

è meglio omettere t

Le proprietà degli integrali lungo una linea si ottengono immediatamente dalle proprietà dell'integrale di Stieltjes che compare al secondo membro di (8.1).

Segnaliamo ora due casi particolarmente interessanti di integrale lungo una linea.

Riintra nella precedente definizione?

1) Sia $s=s(t)$ una ascissa curvilinea su γ : nelle ipotesi fatte s è continua e monotona. Allora, comunque si scelga una funzione f continua su γ , esiste $\int_\gamma f\, ds$. Inoltre, se supponiamo che $\underline{x}(t)$ sia differenziabile con continuità su $[a,b]$ dal teorema 5.1 e dalla nota relazione

$$s'(t) = \|\underline{x}'(t)\|$$

si deduce che vale la formula

$$\int_\gamma f\, d\, s = \int_a^b f(\underline{x}(t))\, \|x'(t)\|\, dt \quad .$$

2) Sia $\underline{f}: R^n\to R^n$ una funzione definita almeno nei punti di γ e ivi continua. Consideriamo la forma differenziale

$$\underline{f}(\underline{x})d\underline{x} = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_1,x_2,\dots x_n)dx_k \quad .$$

Poichè ogni funzione $x_k(t)$ è a variazione limitata su a,b esiste

$$\int_\gamma \underline{f}\, d\underline{x} = \sum_{k=1}^{n}\int_\gamma f_k dx_k \quad .$$

In particolare, se $\underline{x}(t)$ è differenziabile con continuità in $[a,b]$, vale la formula

$$\int_\gamma \underline{f}\, d\underline{x} = \sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(\underline{x}(t))x_k'(t)dt \quad . \tag{8.2}$$

9. Integrazione delle forme differenziali.

Sia $A\subseteq R^n$ (n>1) un aperto connesso e sia $\underline{f}: A\to R^n$ continua. Allora, per ogni curva γ rettificabile contenuta in A, esiste

$$I = \int_\gamma \underline{f}(\underline{x})\, d\underline{x} \quad .$$

Al variare di γ in A, il valore di I varierà in generale con γ. Consideriamo in particolare due

punti qualsiasi $\underline{x}^\circ$, $\underline{x}^1 \in A$ e due qualsiasi linee rettificabili γ_1, $\gamma_2 \subset A$ aventi come primo e secondo estremo, entrambe, $\underline{x}^\circ$ e $\underline{x}^1$. Il valore di I sarà diverso (almeno in generale) a seconda che si assuma come cammino di integrazione γ_1 oppure γ_2. Tale valore non dipende quindi in generale, soltanto dai punti iniziale e finale, ma dall'intero cammino di integrazione.
Il caso in cui I dipenda esclusivamente dagli estremi del cammino di integrazione ha però importanza fondamentale nelle applicazioni. Ci proponiamo quindi di studiare in quali circostanze si verifica questa situazione.
Cominciamo ad osservare che vale il

Teorema 9.1 - Condizione necessaria e sufficiente affinchè il valore di I dipenda soltanto dagli estremi del cammino di integrazione è che per ogni curva continua chiusa rettificabile $\gamma \subset A$ risulti

$$\int_\gamma \underline{f}(\underline{x})\, d\underline{x} = 0 \quad .$$

Chi assicura che l'integrale non dipende dalla parametrizzazione (all'interno della classe delle curve rettificabili) Cfr Rudin n. 15, p. 142 ?

La condizione è necessaria. Infatti, siano $\underline{x}^\circ, \underline{x}$ due punti di γ e γ_1, γ_2 i due archi in cui essi dividono γ, percorsi nel senso da $\underline{x}^\circ$ a $\underline{x}$. Per ipotesi

$$\int_{\gamma_1} \underline{f}(\underline{y})d\underline{y} = \int_{\gamma_2} \underline{f}(\underline{y})d\underline{y} \quad \text{da cui} \quad \int_{\gamma_1-\gamma_2} \underline{f}(\underline{y})d\underline{y} = \int_\gamma \underline{f}(\underline{y})d\underline{y} = 0 .$$

La condizione è sufficiente. Siano infatti $\underline{x}^\circ, \underline{x} \in A$ due punti qualunque e siano $\gamma_1 \subset A$, $\gamma_2 \subset A$ due linee qualunque aventi come primo e secondo estremo, rispettivamente, $\underline{x}^\circ$ e $\underline{x}$. Poniamo $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$.
Si ha allora $0 = \int_\gamma f(\underline{x})d\underline{x} = \int_{\gamma_1-\gamma_2} f(\underline{x})d\underline{x}$ da cui

$\int_{\gamma_1} f(\underline{x})d\underline{x} = \int_{\gamma_2} f(\underline{x})d\underline{x}$. Per l'arbitrarietà di γ_1 e γ_2 segue l'asserto.
Dimostriamo ora il seguente

Teorema 9.2 - Condizione necessaria e sufficiente affinchè, assegnati comunque due punti $\underline{x}^\circ$, $\underline{x}^1 \in A$, l'integrale

$$\int_{\widehat{\underline{x}^\circ,\underline{x}^1}} \underline{f}(\underline{x})\, d\underline{x}$$

esteso a una qualunque curva continua rettificabile $\gamma \subset A$ (avente come primo e secondo estremo, rispettivamente, $\underline{x}^\circ$ e $\underline{x}^1$) sia indipendente da γ è che esista una funzione $F(\underline{x})$ a valori in R definita e differenziabile in $\mathring{A}$ e tale che

$$\underline{f}(\underline{x}) = \text{grad } F(\underline{x}) \quad . \tag{9.1}$$

Se questa condizione è soddisfatta, la forma differenziale $\underline{f}(\underline{x})d\underline{x}$ viene chiamata differenziale esatto.

La condizione è sufficiente. Infatti, se esiste F soddisfacente (9.1), proveremo che, qualunque sia γ, è

$$\int_\gamma \underline{f}(\underline{x})d\underline{x} = F(\underline{x}^1) - F(\underline{x}^\circ) \quad . \tag{9.2}$$

Sia $\underline{x} = \underline{x}(t) : [a,b] \to A$ l'equazione di γ (°) e sia $\mathring{A}^* \subset \mathring{A}$ un compatto contenente γ nel suo interno.
Sia $t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b$; poniamo

$$\delta = \sup_{j=1\dots m}(t_j - t_{j-1}) \quad , \quad \underline{a}^j = \underline{x}(t_j) \quad (j=0,1\dots m).$$

Se δ è abbastanza piccolo, i segmenti di estremi $\underline{a}^{j-1}$, $\underline{a}^j$ $(j=1\dots m)$ sono interni ad A^*.
Da (8.1) e (3.1) si ricava che

$$\int_\gamma \underline{f}(\underline{x})d\underline{x} = \lim_{\delta\to 0} \sum_{j=1}^m \underline{f}(\underline{a}^j)(\underline{a}^j - \underline{a}^{j-1}) \quad .$$

Dal teorema 5.1 del Cap.II e da (9.1) si ricava anche che

$$F(\underline{x}^1) - F(\underline{x}^\circ) = \sum_{j=1}^m (F(\underline{a}^j) - F(\underline{a}^{j-1})) = \sum_{j=1}^m \underline{f}(\underline{\alpha}^j)(\underline{a}^j - \underline{a}^{j-1})$$

dove $\underline{\alpha}^j$ è un opportuno punto del segmento di estremi $\underline{a}^{j-1}$, $\underline{a}^j$. Per la continuità uniforme di $\underline{f}$ in A^*, per ogni $\varepsilon > 0$ e $\delta < \delta_0(\varepsilon)$ risulta allora:

(°) Se $\underline{x} \in \mathscr{C}^{(1)}[(a,b)]$ la (9.2) è conseguenza immediata di (8.2). Infatti

$$\int_\gamma \underline{f}(\underline{x})d\underline{x} = \int_a^b \text{grad } F(\underline{x}(t))\underline{x}'(t)dt = \int_a^b \frac{dF}{dt}dt = F(\underline{x}(b)) - F(\underline{x}(a)) = F(\underline{x}^1) - F(\underline{x}^\circ) \quad .$$

$$\left|\int_a^b \underline{f}(\underline{x})d\underline{x} - (F(\underline{x}^1)-F(\underline{x}^\circ))\right|$$
$$= \left|\sum_{j=1}^{m} (\underline{f}(\underline{a}^j)-\underline{f}(\underline{\alpha}^j))(\underline{a}^j-\underline{a}^{j-1})\right| + \varepsilon$$
$$\leq \varepsilon \sum_{j=1}^{m} \left\|\underline{a}^j-\underline{a}^{j-1}\right\| + \varepsilon$$
$$\leq \varepsilon\{\ell(\gamma) + 1\}$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, segue (9.2).

La condizione è necessaria. Infatti, se l'integrale in questione non dipende da γ, fissato $\underline{x}^\circ$, al variare del secondo estremo di integrazione $\underline{x}$ in A, l'integrale $\int_{\widehat{\underline{x}^\circ,\underline{x}}} \underline{f}(\underline{y})d\underline{y}$ definisce in A una funzione $F(\underline{x})$ a valori reali.
Se h è abbastanza piccolo, si ha

$$\frac{F(\underline{x}+h\,\underline{e}_i)-F(\underline{x})}{h} = \frac{1}{h}\int_{\widehat{\underline{x},\underline{x}+h\underline{e}_i}} \underline{f}(\underline{y})\, d\underline{y}$$ poichè per ipotesi $\underline{f}(\underline{x})d\underline{x}$ è esatta

(9.3) $$= \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_i+h} f_i(x_1,\ldots x_{i-1},y_i,x_{i+1}\ldots x_n)dy_i$$ scelgo il cammino più comodo e cioè quello parallelo all'asse

$$= f_i(x_1\ldots x_{i-1},x_i+\vartheta h,x_{i+1}\ldots x_n) \quad (0<\vartheta<1)$$ se i-esimo

Il parametro risulta [illegible]

per il teorema 1.3 del Cap.VII. Poichè per $h\to 0$ direttamente ϑ, l'ultimo membro di (9.3) tende a $f_i(\underline{x})$, esiste $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x})$ ed è

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}) = f_i(\underline{x}) \quad .$$

La funzione $F(\underline{x})$ soddisfa quindi la (9.1) ed è certamente differenziabile per la continuità di $\underline{f}(\underline{x})$.

Osserviamo infine che, se esiste $F(x)$ soddisfacente (9.1), anche $F(\underline{x})+c$ (c costante arbitraria) soddisfa tale condizione. Viceversa, se $F_1(\underline{x})$, $F_2(\underline{x})$ soddisfano entrambe la (9.1), risulta $d(F_1-F_2)=0$ e quindi $F_1(\underline{x})-F_2(\underline{x})$ è costante in A. Si conclude che se esistono funzioni F soddisfacenti la (9.1), esse sono infinite e differiscono l'una dall'altra per una costante additiva. Essendo $\underline{f}(\underline{x})$ continua in A, ogni tale funzione F è differenziabile con continuità in A .

10. I differenziali esatti.

Poniamoci ora il problema di decidere se una assegnata forma differenziale sia o meno un differenziale esatto.
Supponiamo che $\underline{f}(\underline{x})$ sia differenziabile con continuità in A(°). Allora, se $\underline{f}(\underline{x})d\underline{x}$ è un differenziale esatto, ogni funzione F soddisfacente (9.1) è due volte differenziabile con continuità in A. Si ha allora $(h,k=1\ldots n)$

$$\frac{\partial f_h}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_h \partial x_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_h} = \frac{\partial f_k}{\partial x_h} \quad .$$

Vale quindi il

Teorema 10.1 - Se $\underline{f}(\underline{x})$ è differenziabile con continuità in A, affinchè $\underline{f}(\underline{x})d\underline{x}$ sia un differenziale esatto è necessario che le componenti di $\underline{f}$ soddisfino le condizioni

(10.1) $$\frac{\partial f_h}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_h} \qquad (h,k=1\ldots n) \quad .$$

Le (10.1) sono anche localmente sufficienti affinchè $\underline{f}(\underline{x})d\underline{x}$ sia un differenziale esatto. Sussiste infatti il

fatto almeno per i connessi

Teorema 10.2 - Se $\underline{f}(\underline{x})$ è differenziabile con continuità in un intervallo aperto $I \subseteq R^n$ e soddisfa ivi le (10.1), allora $\underline{f}(\underline{x})d\underline{x}$ è un differenziale esatto.

Dimostrazione - Fissiamo $\underline{a}=(a_1\ldots a_n)\in I$ e sia $\underline{x}=(x_1\ldots x_n)$ un punto generico di I. Poniamo $\underline{x}^i=(x_1,x_2,\ldots x_{i-1},x_i,a_{i+1}\ldots a_n)$ $(i=0,\ldots n)$. Ovviamente $\underline{x}^\circ=\underline{a}$, $\underline{x}^n=\underline{x}$ e la poligonale Γ di vertici $\underline{x}^\circ, \underline{x}^1\ldots\underline{x}^n$ appartiene ad I. Consideriamo la

(°) E' facile verificare, ricordando il teorema 7.1 del Cap.II, che i teoremi di questo paragrafo valgono anche sotto la meno restrittiva ipotesi seguente: $\underline{f}$ sia continua e dotata di derivate "in croce" $\frac{\partial f_h}{\partial x_k}$ $(h \neq k)$ continue in A .

funzione

$$(10.2)\qquad F(\underline{x}) = \int_\Gamma \underline{f}(\underline{y})\, d\underline{y} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{x_i} f_i(x_1 \ldots x_{i-1}, y, a_{i+1} \ldots a_n)\,dy \quad .$$

Dimostriamo che questa funzione è differenziabile e soddisfa (9.1) in I. Infatti, per il teorema 3.3 del Cap.VIII e il corollario 4.1 del Cap. X si ha $(k=1\ldots n)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(\underline{x}) = f_k(\underline{x}^k) + \sum_{i=k+1}^{n} \int_{a_i}^{x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} f_i(x_1 \ldots x_{i-1}, y, a_{i+1} \ldots a_n)\,dy$$

$$= f_k(\underline{x}^k) + \sum_{i=k+1}^{n} \int_{a_i}^{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} f_k(x_1 \ldots x_{i-1}, y, a_{i+1} \ldots a_n)\,dy$$

$$= f_k(\underline{x}^k) + \sum_{i=k+1}^{n} (f_k(\underline{x}^i) - f_k(\underline{x}^{i-1}))$$

$$= f_k(\underline{x}^n) = f_k(\underline{x}) \quad .$$

Di qui, tenendo presente che $\underline{f}(\underline{x})$ è continua in I, segue la tesi.

Si osservi che la formula (10.2) permette di determinare una funzione di cui $\underline{f}(\underline{x})$ è il gradiente; tutte le altre, come abbiamo già osservato, differiscono da questa per una costante additiva.

Esempio - Consideriamo la forma differenziale

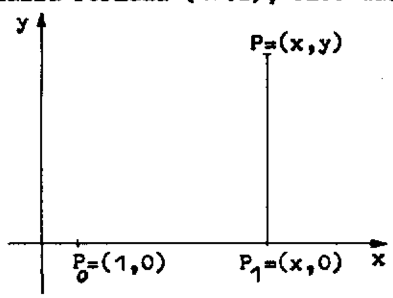
$$(10.3)\qquad -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy \quad .$$

Essa soddisfa nel semipiano $x > 0$ le condizioni del teorema 10.2 ed è quindi, in tale semipiano, un differenziale esatto. Una funzione F di cui essa è il differenziale è assegnata dalla formula (10.2), cioè da:

$$F(x,y) = \int_{P_0P_1 + P_1P} \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right)$$

$$= \int_1^x 0\,dx + \int_0^y \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$$= \int_0^y \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\,dy$$



$$= \arctan \frac{y}{x} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}\right) .$$

Le funzioni di cui la (10.3) è il differenziale nel semipiano $x > 0$ sono quindi tutte e sole quelle della forma

$$F(x,y) = \arctan\frac{y}{x} + c \qquad (c \text{ costante}) .$$

Consideriamo ora un aperto connesso A, che non sia necessariamente un intervallo, nel quale siano soddisfatte le condizioni del teorema precedente.
In ogni intervallo $I \subseteq A$ può essere definita una funzione F soddisfacente là (9.1): non è detto però che sia sempre possibile mettere assieme le varie definizioni locali in modo da ottenere una funzione F definita in A e soddisfacente la (9.1).
Quando si debba soltanto conciliare le definizioni corrispondenti a due intervalli adiacenti parzialmente sovrapponentisi non si incontra alcuna difficoltà; possono però nascere complicazioni quando si consideri una catena chiusa di intervalli di questo tipo. In questo caso infatti, considerando i punti appartenenti all'intersezione del primo e dell'ultimo intervallo della catena, è talora impossibile conciliare i valori assegnati in tali punti dalla definizione iniziale e da quella finale comunque sia stata scelta la funzione F soddisfacente (9.1) nel primo intervallo.

Questo avviene ad esempio se si considera la forma differenziale

$-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ nell'aperto A costituito dal piano cartesiano (x,y) privato dell'origine.

Si può però dimostrare che questa situazione non si verifica quando l'insieme A è semplicemente connesso, cioè quando A è tale che qualunque linea chiusa continua $\gamma \subset A$ è riducibile ad un punto di A con una deformazione continua.
Sussiste cioè il sgguente teorema (che ci limitiamo ad enunciare):

Teorema 10.3 - Se $\underline{f}: R^n \to R^n$ è differenziabile con continuità in un aperto A semplicemente connesso e soddisfa ivi le (10.1), allora $\underline{f}(\underline{x})d\underline{x}$ è un differenziale esatto.

11. Integrali di superficie (°).

Sia Σ una superficie nello spazio R^3, quadrabile di equazione $\underline{x}=\underline{x}(\underline{u})$ dove $\underline{x}: R^2 \to R^3$ è definita nei punti di una regione quadrabile $S \subset R^2$, continua e a variazione limitata in S.
Siano f e φ due funzioni reali definite almeno nei punti di Σ. Diremo che f è integrabile rispetto a φ su Σ se esiste l'integrale di Stieltjes $\int_S f(\underline{x}(\underline{u}))d\varphi(\underline{x}(\underline{u}))$ e porremo, per definizione

$$(11.1)\qquad \int_\Sigma f\, d\varphi = \int_S f(\underline{x}(\underline{u}))d\varphi(\underline{x}(\underline{u})) \quad .$$

Consideriamo ora un caso particolarmente importante di integrale di superficie. Supponiamo che Σ sia una superficie regolare, cioè tale che la corrispondenza fra i due insiemi S e Σ definita da $\underline{x}=\underline{x}(\underline{u})$ sia biunivoca, che $\underline{x} \in \mathscr{C}^{(1)}(S)$ e che inoltre la matrice jacobiana di $\underline{x}$ rispetto a $\underline{u}$ abbia sempre in S la caratteristica massima 2.
Sia $\underline{x}^\circ$ un punto fissato su Σ e corrispondente al valore $\underline{u}^\circ$ del parametro $\underline{u}$. Per ogni punto $\underline{x} \in \Sigma$ (corrispondente al valore $\underline{u}$ del parametro) diciamo $\sigma=\sigma(\underline{x})$ l'area della parte di Σ corrispondente a quella parte della regione S che appartiene all'intervallo $[\underline{u}^\circ,\underline{u}]$.
Consideriamo l'integrale $\int_\Sigma f\, d\sigma$, dove f è una qualsiasi funzione continua su Σ. Essendo $f(\underline{x}(\underline{u}))$ continua e $\sigma(\underline{x}(\underline{u}))=\sigma^*(\underline{u})$ a variazione limitata in S, tale integrale esiste. Verifichiamo che esso è riconducibile a un integrale secondo Cauchy-Riemann.
Infatti, consideriamo l'area $\Delta\sigma$ della parte di Σ corrispondente all'intervallo $[\underline{u},\ \underline{u}+d\underline{u}]$. Risulta

$$(11.2)\ \Delta\sigma = \sigma^*(u_1+du_1, u_2+du_2) - \sigma^*(u_1+du_1, u_2) - \sigma^*(u_1, u_2+du_2) + \sigma^*(u_1, u_2) \quad .$$

(°) Ci limitiamo per semplicità al caso di superficie nello spazio euclideo tridimensionale; le considerazioni svolte in questo paragrafo possono però essere estese al caso di superficie in uno spazio euclideo a più di tre dimensioni.

Ma, se $\|d\underline{u}\|$ è abbastanza piccolo, $\Delta\sigma$ coincide, a meno di infinitesimi di ordine superiore, con l'area del parallelogrammo avente come lati i due vettori $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u_1}(\underline{u})du_1$ e $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u_2}(\underline{u})du_2$, cioè :

$$(11.3)\qquad \Delta\sigma = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_1}(\underline{u}) \wedge \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_2}(\underline{u}) \right| du_1 du_2 + \eta(d\underline{u})$$

con $\frac{|\eta(d\underline{u})|}{\|d\underline{u}\|^2} \to 0$ per $\|d\underline{u}\| \to 0$.
Confrontando (11.2), (11.3) e (7.1) si ottiene :

$$\frac{\partial^2 \sigma^*}{\partial u_1 \partial u_2}(\underline{u}) = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_1}(\underline{u}) \wedge \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_2}(\underline{u}) \right| .$$

Perciò da (11.1) e dal teorema 7.2 si ricava il

Teorema 11.1 - Se Σ è una superficie regolare di equazione $\underline{x}=\underline{x}(\underline{u})$ $(\underline{x}: S \to R^3)$ e $f: \Sigma \to R$ è continua, esiste $\int_\Sigma f\, d\sigma$ e risulta

$$(11.4)\qquad \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_S f(\underline{x}(\underline{u})) \left| \frac{\partial x}{\partial u_1}(\underline{u}) \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2}(\underline{u}) \right| du_1 du_2 .$$

In particolare, se Σ ha l'equazione cartesiana $z=z(x,y)$ $(y,x$ reali; $(x,y) \in S)$, allora, ponendo $\underline{x}=(x,y,z)$ e $\underline{u}=(x,y)$, da (11.4) si ricava

$$\int_\Sigma f\, d\sigma = \int_S f \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \quad .$$